قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

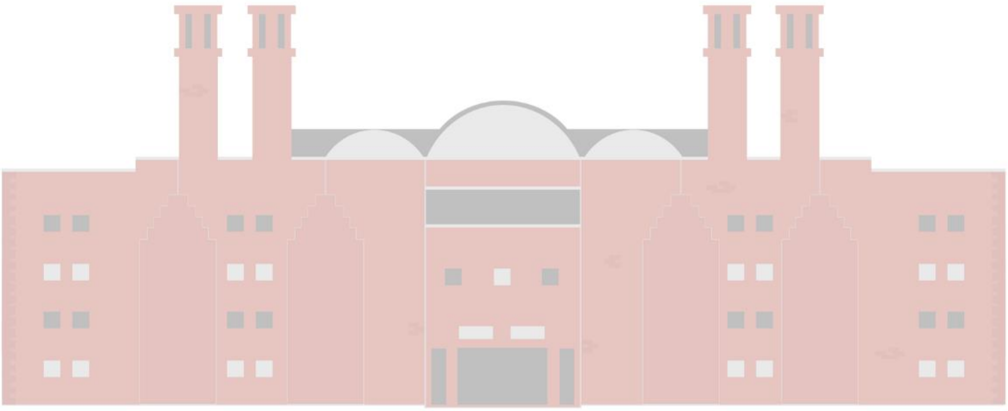
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الخامسة

12 صفحة



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/10/1

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

مثال (٢) :

عين قيم الثوابت a و b و c كي يكون الحقل الشعاعي كمونياً

$$\vec{F} = (x + cy + az)\hat{\imath} + (x + y^2 + bz)\hat{\jmath} + (cy + z^2)\hat{k}$$

ثم أحسب تدفق هذا الحقل عبر السطح الموجه المغلق

$$\sum : \{x^2 + y^2 = 1 \ , \quad z = 0 \ , \quad z = 2\}$$

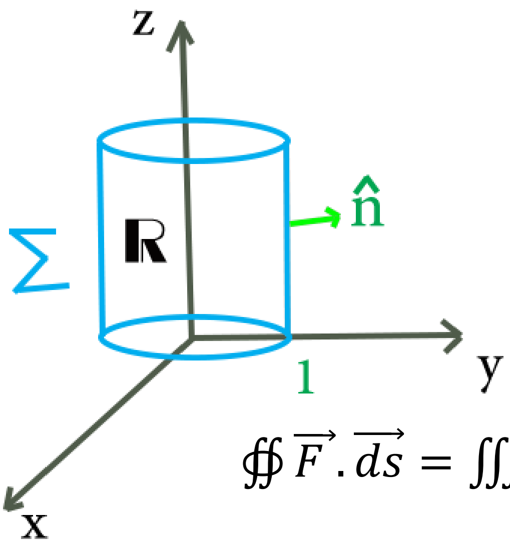
الحل: $\vec{F}$ مستمر المشتقات ودورانه

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + cy + az & x + y^2 + bz & cy + z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(c - b) + \hat{\jmath}(a) + \hat{k}(1 - c)$$

كي يكون $\vec{F}$ كمونياً يجب أن يكون $\overrightarrow{\nabla \wedge F} = 0 \ \Rightarrow a = 0 \, , b = 1 \, , c = 1$

$$\Rightarrow \vec{F} = (x + y)\hat{\imath} + (x + y^2 + z)\hat{\jmath} + (y + z^2)\hat{k}$$



إن $\sum$ أملس جزئياً وهو مغلق وموجه إلى

خارج الأسطوانة ، $\vec{F} \in cl^1(R)$

نطبق مبرهنة غاوس في التفرق:

$$\oiint \vec{F}.\vec{ds} = \iiint_R (\vec{\nabla}.\vec{F})dv = \iiint_R (1 + 2y + 2z)dv$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{z=0}^{2} (1 + 2\rho \sin\varphi + 2z)dz = 6\pi$$

مثال (٣):

ليكن $\vec{F} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\hat{r} + (r\cos\theta)\hat{\theta} + (\frac{\cos\varphi}{r})\hat{\varphi}$

ولتكن R منطقة محاطة بالسطح الموجه $\sum$:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$$

تأكد من تحقق شروط وجود التكامل $\oiint_{\Sigma}(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}).\overrightarrow{ds}$ ثم احسب قيمته.

الحل: من قانون حساب الدوران في الإحداثيات الكروية نجد

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}\right)\hat{r} + (2\cos\theta)\hat{\varphi}$$

لما كان $\sum$ سطح مغلق موجه وأملس ، ناظمه $\hat{n}$ موجه للخارج ، $cl^1(R) \Rightarrow \vec{\nabla}\Lambda\vec{F}$

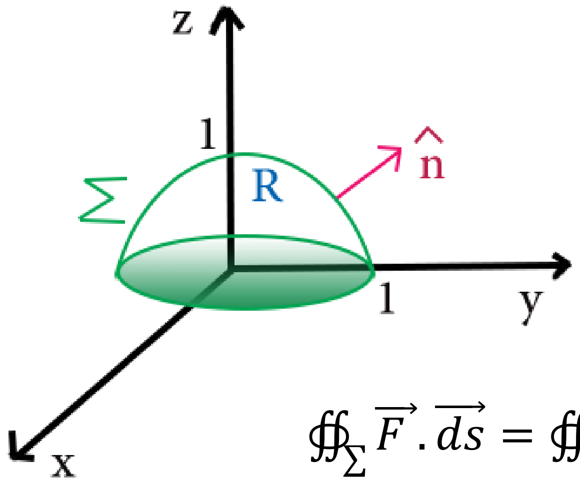
نطبق مبرهنة غاوس في التفرق

$$\oiint_{\Sigma}(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}).\overrightarrow{ds} = \iiint_R \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F})dv = 0$$

حيث : $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}) \equiv 0$

مثال (٤):

احسبت تدفق $\vec{F}$ حيث $\vec{F} = x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ عبر السطح الموجه المغلق



$$\sum : \{z = 0\,, z = 1 + x^2 + y^2\}$$

الحل:

إن $\sum$ مغلق أملس جزئياً ، الناظم $\hat{n}$ موجّه للخارج

إن تدفق $\vec{F}$عبر $\sum$ هو $\oiint_{\Sigma} \vec{F}\,.\overrightarrow{ds} = \oiint_{\Sigma} (\vec{F}\,.\hat{n})ds = \oiint_{\Sigma} u.\,ds$

إن حساب التكامل بهذه الطريقة (من التعريف) طويل جداً لذا نحول التكامل الثلاثي باستخدام مبرهنة غاوس في التفرق حيث $\vec{F} \in cl^1(R)$

$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \iiint_{\mathbb{R}} \vec{\nabla}.\vec{F}.dv = \iiint_{\mathbb{R}} [3(x^2 + y^2) + 2z]dv$$

بالانتقال إلى الإحداثيات الاسطوانية نجد:

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \int_{z=0}^{1-\rho^2} (3\rho^2 + 2z)|J|\,.d\varphi.d\rho.dz$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho^2} (3\rho^2 + 2z)dz = \frac{5}{6}\pi$$

تذكير: للانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الاسطوانية:

$$x = \rho.\cos\varphi \quad , \qquad y = \rho.\sin\varphi \quad , \qquad x^2 + y^2 = \rho^2, z = z$$

ونقوم بإيجاد حدود التكامل حسب شروط المسألة

==

مثال: إذا كان Σ سطحاً محدداً موجهاً مغلقاً أملساً يحيط بالمنطقة الفراغية $\mathbb{R}$. إذا كان

$w \in cl^2(\mathbb{R})$ توافقياً في $\mathbb{R}$ وبرهن أن:

$$\oiint_{\Sigma}\overrightarrow{ds} = \vec{0} \text{ و } \oiint_{\Sigma}\vec{\nabla}w.\overrightarrow{ds} = 0 \text{ و } \oiint_{\Sigma}\overrightarrow{ds}\wedge\vec{\nabla}w = \vec{0}$$

الحل: إن Σ و $\vec{\nabla}w \in cl^1(\mathbb{R})$ يحققان شروط مبرهنات التحويل لتكامل حجمي:

نعوض في المبرهنة الثانية $u = 1$ فنجد:

$$\oiint_{\Sigma}1\overrightarrow{ds} = \iiint_{\mathbb{R}}(\vec{\nabla}1).dv = \iiint_{\mathbb{R}}\vec{0}dv = \vec{0}$$

نعوض في المبرهنة الأولى $\vec{F} = \vec{\nabla}w$ فنجد:

$$\oiint_{\Sigma}\vec{\nabla}w.\overrightarrow{ds} = \iiint_{\mathbb{R}}\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}w)dv = \iiint_{\mathbb{R}}\nabla^2 wdv = 0$$

($\nabla^2 w = 0$ لأن w توافقي)

نعوض في المبرهنة الثالثة $\vec{F} = \vec{\nabla}w$ فنجد:

$$\oiint_{\Sigma}\overrightarrow{ds}\wedge\vec{\nabla}w = \iiint_{\mathbb{R}}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}w)dv = \vec{0}$$

($\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}w = 0$ دوماً)

مبرهنة ستوكس للتحويل من تكامل سطحي إلى خطي وبالعكس:

ليكن Σ سطحاً موجهاً مفتوحاً حافته Γ منحني فراغي موجه مغلق وليكن $\vec{F} \in cl^1(\mathbb{R})$ حيث $\mathbb{R}$ منطقة فراغية تحوي Σ. إن تدفق دوران $\vec{F}$ عبر Σ يساوي جولان $\vec{F}$ حول Γ.

$$\iint_{\Sigma}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}).\overrightarrow{ds} = \oint_{\Gamma}\vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

مثال: ليكن $u \in cl^2(\mathbb{R})$. أحسب تدفق دوران الحقل الشعاعي

$$\vec{F} = (2y^3 + z)\hat{\imath} + (-yx^2)\hat{\jmath} + (xy^2z^2)\hat{k} + \vec{\nabla}u$$

عبر السطح المستوي الموجه $x^2 + y^2 \leq 1$ (معادلة قرص دائرة)

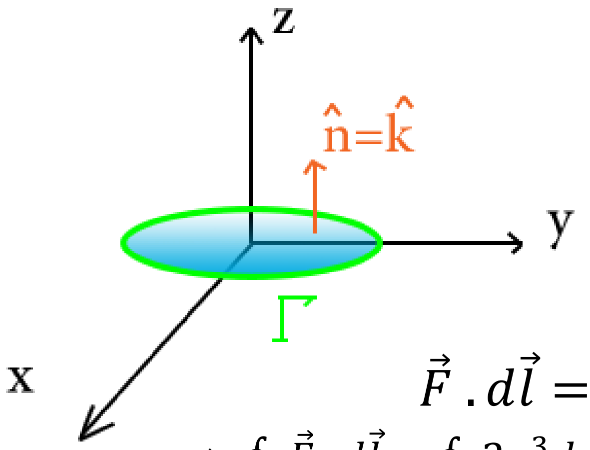
الحل: السطح Σ مفتوح ((لا يحد منطقة فضائية)) وموجه وأملس حافته Γ منحني مغلق وأملس

و $\vec{F} \in cl^1(\mathbb{R})$ حيث $\mathbb{R}$ منطقة مستوية تحوي

لأن $u \in cl^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \vec{\nabla}u \in cl^1$

وهكذا تحققت شروط مبرهنة ستوكس

$$\iint_{\Sigma}(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}).\overrightarrow{ds} = \oint_{\Gamma} \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



$$\vec{F}\,.d\vec{l} = 2y^3dx - x^2ydy + du$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{F}\,.d\vec{l} = \oint_{\Gamma} 2y^3dx - x^2ydy + du \quad , \oint_{\Gamma} du = u(A) - U(K) = 0$$

لان المنحني مغلق

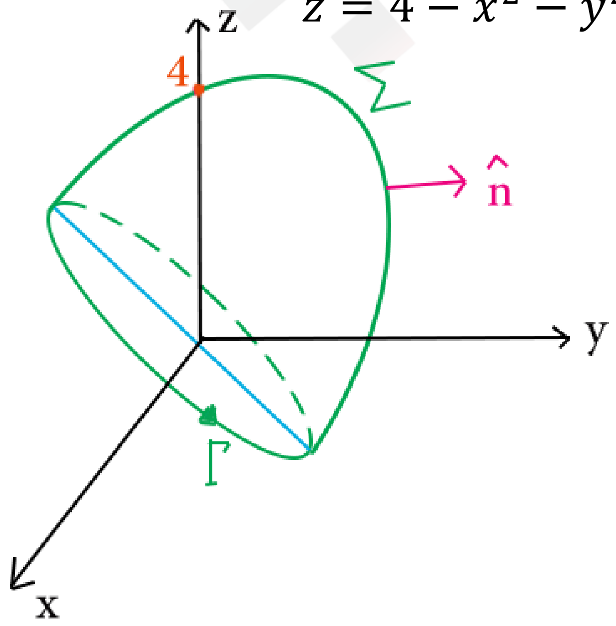
نفرض $x = cost$, $Y = sin\ t$

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\,.d\vec{l} = -2\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,dt - \int_0^{2\pi} cos^3t\,sint\,dt = -\frac{3}{2}\pi$$

مثال:

برهن ان $\vec{F} = x^2\,\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$ كموني واحسب جولانه حول المنحني الناتج من تقاطع المستوي $x + y + z = 0$ والسطح $z = 4 - x^2 - y^2$

الحل:



ان الحقل $\vec{F}$ كموني لان $\vec{F} \in cl^1\ (R)$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

ان $\sum$ سطح محدد أملس مفتوح وبسيط

باتجاه Z ، نستخدم مبرهنة ستوكس :

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

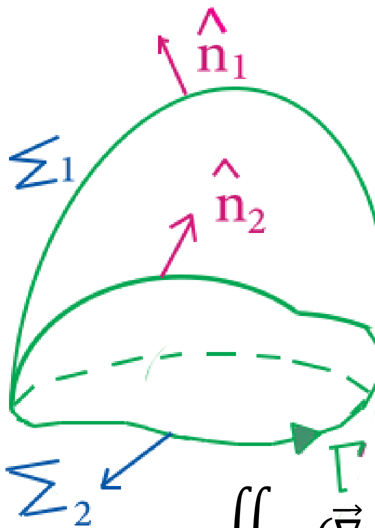
$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\,.\,d\vec{l} = \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,).\,d\vec{s} = 0$$

طريقة ثانية:

ان $\vec{F}$ كموني في منطقة تحوي على المنحني المغلق Γ فإن جولانه حول Γ صفر

==

نتيجة ١:



الانتقال من تكامل على سطح مفتوح الى سطح اخر

مفتوح ليكن $\sum_1$ و $\sum_2$ سطحان موجهين

ومفتوحين يحددهما المنحني Γ الموجه ويقعان

في جهه واحدة منه ولتكن $\mathbb{R}$ منطقة فراغية

تحتوي السطحان $\sum_1$ و $\sum_2$ عندئذ يكون

$$\iint_{\Sigma_1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,)\,.\,d\vec{s_1} = \iint_{\Sigma_1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,)\,.\,d\vec{s_2} = \oint_{\Gamma} \vec{F}\,.\,d\vec{l}$$

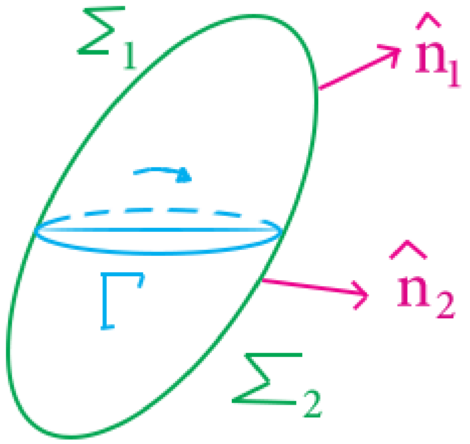
==

ملاحظة ١:

ان العلاقة $\oint_{\Gamma} \vec{F}\,.\,d\vec{l} = \iint_{\Sigma_1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,)\,.\,d\vec{s_2} = \iint_{\Sigma_1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,)\,.\,d\vec{s_1}$ تبقى

صحيحة اذا كان Γ منحني يحد السطح

المستوي $\sum_2$ ويكون في هذه الحالة $\widehat{n_2}$ شعاعاً ثابتاً



ملاحظة ٢:

اذا كان $\sum_1$ و $\sum_2$ سطحان يقعان في جهتين

مختلفتين بالنسبة للمنحني Γ عندئذ يكون

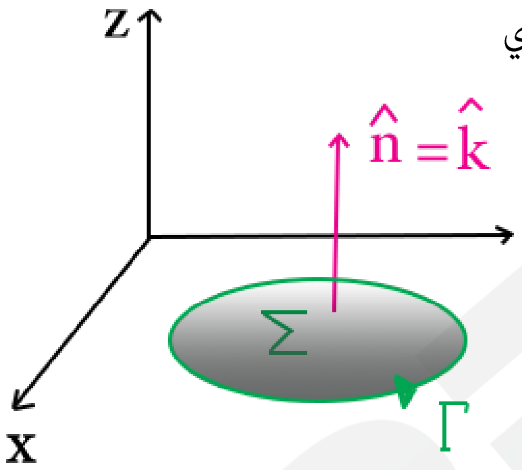
$$\iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,).\,d\vec{s_1} = -\iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,)\,.\,d\vec{s_2}$$

إذا يجب توجيه Γ،حافة $\sum_1$ بعكس طريقة توجيه الحافة Γللجزء $\sum_2$ بحيث يبقى الناظم موجهاً إلى خارج السطح المغلق $\sum_2$ و $\sum_1$.

ومنه:

$$cl^1(R) \text{ من} \vec{F} \text{ مهما يكن } \oiint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) . \overrightarrow{ds} = \mathbf{0}$$

نتيجة ٢: حالة خاصة من مبرهنة ستوكس (مبرهنة غرين في المستوي)



إذا كان Γ منحنياً مستوياً مغلقاً يقع في المستوي Z=0 أي

وكان

$$\vec{F}(x, y) = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath}$$

وكان $dl = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = F_1dx + F_2dy$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$\overrightarrow{ds} = \hat{k}\, dxdy$ ،لان Σ جزء من مستوي الأفق و *ds=dx dy*

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}). \overrightarrow{ds} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

نعوض في مبرهنة ستوكس

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{\Gamma} (F_1dx + F_2dy)$$

حيث Γمنحن مغلق مستوي موجه بالاتجاه الموجب .

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

مبرهنة غرين:

ليكن $cl^2(R) \ni w$وu حيث Rمنطقة فراغية محاطة بسطح موجه مغلق Σ

عندئذ: $\oiint_{\Sigma} (u\vec{\nabla} w - w\vec{\nabla}u).\overrightarrow{ds} = \iiint_R (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u)dv$

أو $\oiint \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \iiint_R (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u)dv$

حيث $\frac{\partial w}{\partial n}$ و $\frac{\partial u}{\partial n}$ المشتقين الموجهين وفق $\hat{n}$ (تذكرة $\vec{\nabla}= \hat{N}\frac{\partial}{\partial N}$)

==

نتيجة:

إذا كان u وw توافقين في R (أي $\nabla^2 u = \nabla^2 w = 0$) فإن

$$\oiint_{\Sigma} \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = o$$

تعميم:

يمكن تعميم هذه المبرهنة على الحالة التي يتألف فيها Σ من سطحين موجهين مغلقين منفصلين يقع أحدهما داخل الآخر (أو أكثر من سطح داخل السطح الكبير) يحسب التكامل السطحي كمجموع تكاملات تقدر على كل شطح على انفراد، ويحسب التكامل الثلاثي غلى المنطقة الفراغية R المحددة بهذه السطوح على أن يبقى الناظم موجهاً إلى خارج R .

==

حالة خاصة من مبرهنة غرين :

علاقة غرين:

إذا كانت O نقطة ثابتة و r بعد نقطة متغيرة P من O ، تتغير على منطقة فراغية R محدود بالسطح المغلق الموجه الأملس $\sum$ (معادلته تعطى بـِ $\vec{r}$) عندئذٍ فإن التابع $u = \frac{1}{r}$ توافقي في R .

ملاحظة

عندما تكون O خارج R يكون $u = \frac{1}{r} \in cl^2(\mathrm{R})$ وبفرض $w \in cl^2(R)$ نطبق مبرهنة غرين:

$$\oiint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] ds = \iiint_R \left(\frac{1}{r}\, \nabla^2 W\right) dv$$

إذا كان W توافقي في R فإن $u = \frac{1}{r}$ يصبح لا نهائياً عند O ولا يمكن تطبيق مبرهنة غرين ، نستنتج عندئذٍ من Rجوار لـِ O تكون فيه $\frac{1}{\mathrm{r}}$ غير محدودة ويقع هذا الجوار داخل كرة مركزها O ونصف قطرها a وسطحها Σ_1 ، نطبق عندئذٍ مبرهنة غرين في المنطقة R_1 المحاطة بالسطحين المغلقين و الموجهين Σ و Σ_1 (التوجيه بحيث يبقى الناظم خارج R_1 ، على أن نحسب التكاملات السطحية على Σ و Σ_1 و التكامل الثلاثي على R_1 ، ثم نجعل $a \to 0$ وتكون علاقة غرين :

$$\oiint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] ds = 4\,\pi\, w_0 \iiint_R \left(\frac{1}{r}\, \nabla^2 W\right) dw$$

(w_0 قيمة W عند الــ 0) وعندما يكون W توفقياً في Rيكون التكامل الثلاثي معدوماً .

مثال : ليكن Σ سطحاً موجهاً مغلقاً أملساً يحيط بمنطقة فراغية R تحوي 0 ، و $\hat{n}$ ناظم Σ موجه للخارج وليكن $u, w \in \mathrm{d}^2(\mathrm{R})$ و u توافقي مع في R ، ليكن $u = \frac{1}{r}$ على Σ فقط ، حيث r بعد نقطة من Σ من 0 (أي $r = |\vec{r}|$) ، برهن أن :

$$\iiint_R \left(\frac{1}{r} - u\right) \nabla^2 w \;\; dv = \; -4\,\pi\, w_0$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

الحل : إن شروط مبرهنة غرين محققة :

$$\text{①}\quad \oiint_{\Sigma} \left(u\,\frac{\partial w}{\partial n} - w\,\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iiint_{R} u\,\nabla^2 w\,dv$$

إن شروط علاقة غرين محققة من أجل السطح Σ :

$$\text{②}\quad \oiint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial n} - w\,\frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right] ds = \iiint_{R} \frac{1}{r}\,\nabla^2 w\;dv + 4\,\pi\,w_0$$

نطرح (١) من (٢) فنجد :

$$\oiint_{\Sigma} \left[\left(\frac{1}{r} - u \right) \frac{\partial w}{\partial n} - w\,\frac{\partial \left(\frac{1}{r} - u \right)}{\partial n} \right] ds = \iiint_{R} \left(\frac{1}{r} - u \right) \nabla^2 w\,dv + 4\,\pi w_0$$

ولما كان $\frac{1}{r} - u = 0$ على Σ و $\frac{1}{r} - u \neq 0$ داخل R فإن :

$$O = \iiint_{R} \left(\frac{1}{r} - u \right) \nabla^2 w\;dv + 4\,\pi w_0$$

وهو المطلوب

.: تكامل غاوس و الزوايا المجسمة :.

عندما يكون $w = 1$ يكون $\vec{\nabla} w = \vec{0}$ نعوض في علاقة غرين :

تسمى تكامل غاوس:

$$-\oiint_{\Sigma} \left(\vec{\nabla}\,\frac{1}{r} \right) . \overrightarrow{ds} = 0 \qquad (\text{R خارج من O})$$

$$-\oiint_{\Sigma} \left(\vec{\nabla}\,\frac{1}{r} \right) . \overrightarrow{ds} = 4\,\pi \qquad (\text{R داخل O})$$

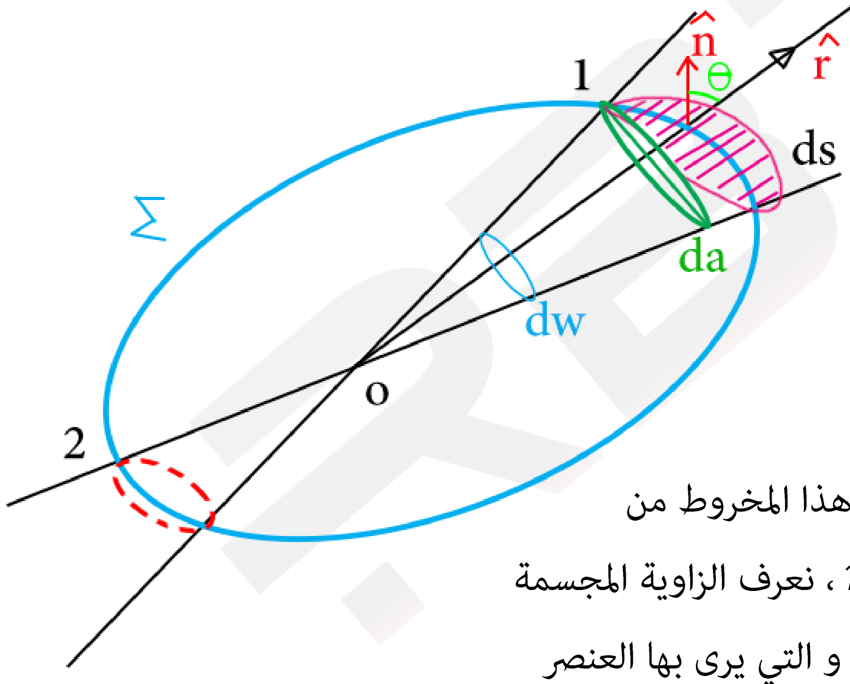
ونكتب التكامل السطحي كما يلي:

$$-\oiint_{\Sigma}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right).\overrightarrow{ds}=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{r^2}\hat{r}.\hat{n}\ ds$$

==

التأويل الهندسي لتكامل غاوس و الزوايا المجسمة.

ليكن ds عنصر المساحة على Σ و $\hat{n}$ ناظم السطح المغلق و الموجه Σ (نحو الخارج).إذا وصلنا جميع نقاط محيط عنصر المساحة ds إلى نقطة ثابتة O (داخلية) يتشكل مخروط ذروته O .



ليكن dr المساحة التي يقطعها هذا المخروط من كرة مركزها O و نصف قطرها r ، نعرف الزاوية المجسمة $d\omega$ (المقاسة بالراديان المجسم) و التي يرى بها العنصر ds من o بأنها الزاوية :

$$d\omega=\frac{da}{r^2}=\mp\frac{ds}{r^2}cos\theta=\mp\frac{\hat{r}.\hat{n}}{r^2}ds$$

حيث θ الزاوية بين $\hat{r}$ و $\hat{n}$ و نأخذ الإشارة (+) عندما تكون θ حادة و نأخذ (-)عندما تكون θ منفرجة .

إذا كانت O داخل R تكون (+)في الموضعين الأول و الثاني.

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

الزاوية ω هي الزاوية الكلية التي يرى بها كل السطح Σ من O

تحسب من : $\omega = \oiint_{\Sigma} \frac{\hat{r}.\hat{n}}{r^2}$ أي أن الزاوية الكلية مقدارها :

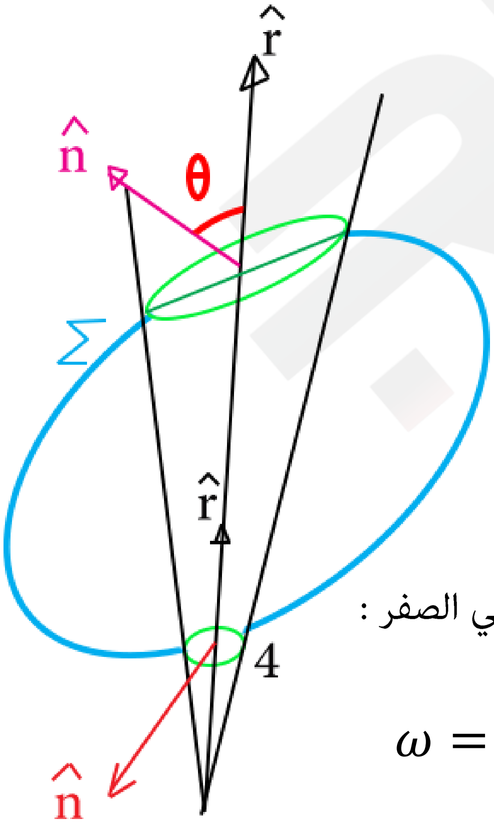
$$\omega = \oiint \frac{dr}{r^2} = 4\pi$$

الحل (في الوضع الأول): $\Sigma: z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

$$\Rightarrow da = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2}{r^2 - x^2 - y^2} + 1}\ \ dx\,dy \Rightarrow \omega = \iint \frac{da}{r^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r} \frac{r\rho d\rho}{r^2\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \left[-\frac{1}{r}(2\pi)\sqrt{r^2 - \rho^2}\right]_0^r$$

$$= 2\pi$$



(في الوضع الثاني): بنفس الأسلوب نجد $\omega = 2\pi$

على كامل الكرة يكون :

$$\omega = \oiint_{\Sigma} \frac{da}{r^2} = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

إذا كانت O خارج R يكون في الوضع الثالث :

$$d\omega = +\frac{\hat{r}.\hat{n}}{r^2} ds$$

و **في الوضع الرابع :** $d\omega = -\frac{\hat{r}.\hat{n}}{r^2} ds$

و تكون الزاوية الكلية ω التي يرى بها السطح Σ من O هي الصفر :

البرهان :

في الوضع الثالث : $\omega = 2\pi$ ، و في الوضع الرابع : $\omega = -2\pi$

بجمع العلاقتين السابقتين نجد : $\omega = 0$

إذا كانت O على السطح Σ يكون $\omega = 2\pi$ إذ يتم إسقاط السطح على نصف الكرة